## Exercice n° 1

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1)\times 0+(-2)\times 6+3\times(-4)=-24$

$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=-24}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-2\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-\sqrt{2}\\3\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(-\frac{2}{3}\right)\times 2+(-2)\times\left(-\sqrt{2}\right)+3\times\frac{3}{2}$

$=\left(-\frac{4}{3}\right)+2\sqrt{2}+\frac{9}{2}=\boxed{\frac{19}{6}+2\sqrt{2}}$

$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{19}{6}+2\sqrt{2}}$.

## Exercice n° 2

I milieu de $[AB]$ et J milieu de $[CD]$.

AB= AC = AD = BD= DC = a.

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

$= a.a.\cos\frac{\pi}{3}$

donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}}$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

$=-\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|.\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$.

$=-a.a.\frac{1}{2}=-\frac{a^2}{2}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}}$

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$..

$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0}$.

- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$.

$\boxed{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0}$.

- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

$=-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}.=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$ .

$\boxed{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0}$.

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow (AB)$ et $(DC)$ sont orthogonales. De même pour les droites $(AC)$ et $(BD)$ ainsi que $(AD)$ et $(BC)$.

3)a) On a: $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ .

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}\right)$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

$=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}+0=0$.

- $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CD}.\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}\right)$

$=\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CJ}$

$=\overrightarrow{CD}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}.\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}CD^2$

$=0-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$.

D'où : $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}=0}$ et $\boxed{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ}=0}$ .

b) La droite $(IJ)$ est la perpendiculaire commune des deux droites $(AB)$ et $(CD)$.

c) $d_1$ : distance entre $(AB)$ et $(CD)$ . $d_1$ = IJ

or $IJ^2 = JB^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ (IJB triangle rectangle en I)

$=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$.(CJB trgle rectgle en J)

$\Rightarrow$ $IJ=\frac{a}{\sqrt{2}}$

De même d ((AC),(BD)) = d((AD),(BC)) $=\frac{a}{\sqrt{2}}$

Qarray.tn Aqra Blech Qarray.tn